www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé, sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Le sujet nécessite l'emploi d'une feuille de papier millimétré.

Les parties I et IV peuvent être traitées indépendamment des autres parties.

Les candidats pourront admettre les résultats d'une question (ou d'une partie) non résolue pour traiter les questions suivantes.

Notations :

$\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'ensemble des matrices carrées d'ordre p, à éléments réels. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note a_{ij} l'élément de la i-ème ligne et j-ème colonne de A.

On dit qu'une suite $B(n)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice L de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ quand chaque élément $b_{ij}(n)$ de $B(n)$ converge vers l'élément correspondant l_{ij} de L lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE I

1. Soient les séries numériques suivantes de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad v_n = (-1)^n \frac{\sin(2n+1)\theta}{(2n+1)!}$$

(θ étant un réel fixé et n décrivant $\mathbb{N}$).

Montrer que ces séries sont convergentes.

Soient $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\tau = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Montrer que $\sigma + i\tau = \sin(e^{i\theta})$. En déduire σ et τ.

2. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{(où } \theta \text{ est un réel fixé).}$$

Calculer A^k, pour k élément de $\mathbb{N}^*$.

On pose $S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Donner l'expression de la matrice $S_n(A)$.

Montrer que la suite de matrices $S_n(A)$ converge vers une matrice que l'on notera sin A. Expliciter la matrice sin A.

PARTIE II

1. Soit $\mathcal{E}_p$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^p$, qui possèdent p valeurs propres réelles et distinctes.

f et g sont deux éléments de $\mathcal{E}_p$, montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors f et g ont les mêmes vecteurs propres.

2. $\mathbb{R}^p$ étant rapporté à sa base canonique, on appelle E_p l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ associées aux endomorphismes de $\mathcal{E}_p$.

   a. Montrer que, pour tout élément A de E_p, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

   b. Montrer que deux éléments A et B de E_p commutent (c'est-à-dire $A \cdot B = B \cdot A$) si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit A un élément de E_p dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Démontrer qu'il existe un unique élément B de E_p à valeurs propres positives ou nulles, tel que $B^2 = A$.

PARTIE III

I représente la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Soit A un élément de E_p.

   D'après II.2., il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

   Écrire sous une forme analogue A^k ($k \in \mathbb{N}$), $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ (où $a_k \in \mathbb{R}$, $A^0 = I$).

2. On pose alors :

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad C_n(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}$$

   Montrer que ces deux suites de matrices convergent respectivement vers des matrices notées sin A et cos A.

3. *a.* Si $A = PDP^{-1}$ (avec les notations du III.1.) écrire sous une forme analogue cos A et sin A.

   b. En déduire que : $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = I$.

   c. A et B étant deux éléments de E_p tels que $A \cdot B = B \cdot A$, calculer cos (A + B) et sin (A + B) en fonction de cos A, cos B, sin A et sin B.

PARTIE IV

L'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de l'espace, ensemble des points M de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle t, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, solutions du système différentiel (1).

(1)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 10x + 8y + 2z = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 6x + 8y - 2z = 0 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} - 6x - 8y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM}(O) = 2a\vec{i} \\ \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(O) = \vec{0} \end{cases}$$

(a réel positif)

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une courbe plane et déterminer une équation de son plan.

   En déduire que la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est une courbe (γ) ensemble des points m de coordonnées $(x(t), y(t))$ solutions du système (2).

(2)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 10x + 6y = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 6x + 10y = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overrightarrow{Om}(O) = 2a\vec{i} \\ \dfrac{d\overrightarrow{Om}}{dt}(O) = \vec{0} \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

2. Intégrer le système différentiel (2) à l'aide du changement de fonctions

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

En déduire la solution de (1).

3. Construire (γ) et préciser sa nature géométrique.

PARTIE V

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & -2 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est un élément de E_3 et déterminer les matrices P et D définies au II.2.*a*.

2. Déterminer la matrice B, définie au II.2.*b*. telle que $B^2 = A$.

3. En utilisant les résultats du III.3., déterminer la matrice $\cos(tB)$ pour t réel.

4. En introduisant les matrices unicolonnes $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

le système différentiel (1) peut s'écrire

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + A \cdot X(t) = \frac{d^2X(t)}{dt^2} + B^2 \cdot X(t) = 0 .$$

Montrer que la solution déterminée au IV.2. peut se mettre sous la forme $X(t) = (\cos tB) \cdot X_0$.

PARTIE VI

Les notations étant celles de la partie V, résoudre le système différentiel (3) :

$$(3) \quad \frac{d^2X(t)}{dt^2} + 2B \cdot \frac{dX(t)}{dt} + A \cdot X(t) = 0 \quad \text{avec} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{dX}{dt}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail